Nom :	***Devoir surveillé n°4***	***11 juin 2018***
Prénom :		*Usage de la calculatrice autorisé*

Toute réponse doit être justifiée.
Les copies doivent être soignées et les résultats doivent être mis en valeur

Exercice 1 – *Commun à tous les candidats* **5 points**

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur [0 ; 15] par

$$g(x)=18x+\mathrm{e}^{0,5x-1}$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Justifier que g est strictement croissante sur [0 ; 15].

Partie B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 15] par

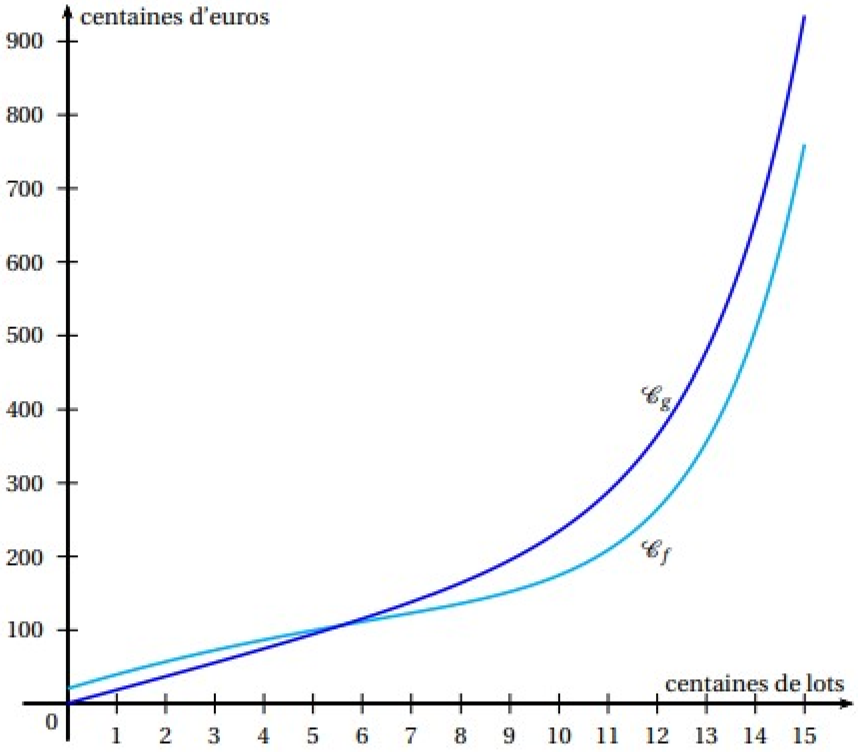
$$f(x)=\mathrm{e}^{0,5x-1}-x^2+20x+20,$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On note C_g et C_f les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.

1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

   a) Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2+2x+20\leqslant 0$.
   b) Résoudre cette inéquation sur l'intervalle [0 ; 15].
   c) En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

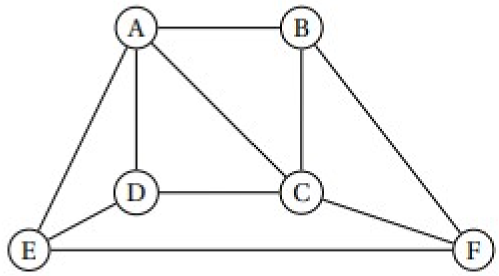


Nom :	***Devoir surveillé n°4***	***11 juin 2018***
Prénom :		*Usage de la calculatrice autorisé*

Exercice 2 – ***Élèves de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*** **5 points**

Partie A

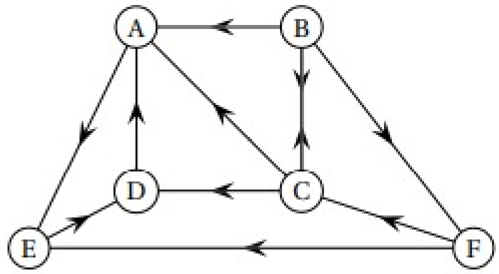
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue:
   - **a)** en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   - **b)** en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.

Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
3. On donne la matrice : $M^3=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 3&1&1&3&1&1 \\ 1&1&1&2&3&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 3&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$
   - **a)** Que représentent les coefficients de cette matrice ?
   - **b)** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ? Écrire tous ces chemins.
   - **c)** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E? Expliquer la démarche.

Exercice 2 – ***Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L*** **5 points**

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.
En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année 2017+n.
Ainsi on a $u_0=120$.

1.
   - **a)** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=1,14u_n-7$.
   - **b)** Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.
2. Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre ne charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.
   Pour cela, on utilise l'algorithme ci-contre :
   - **a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-contre .
   - **b)** Quelle est l'année affichée en sortie d'algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
n ⟵ 0
u ⟵ 120
Tant que .........
        n ⟵ n + 1
        .........
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

3. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-50$ pour tout entier naturel n.
   - **a)** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   - **b)** Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=70\times1,14^n+50$.

Nom :	***Devoir surveillé n°4***	***11 juin 2018***
Prénom :		*Usage de la calculatrice autorisé*

Exercice 3 – *Commun à tous les candidats* **6 points**

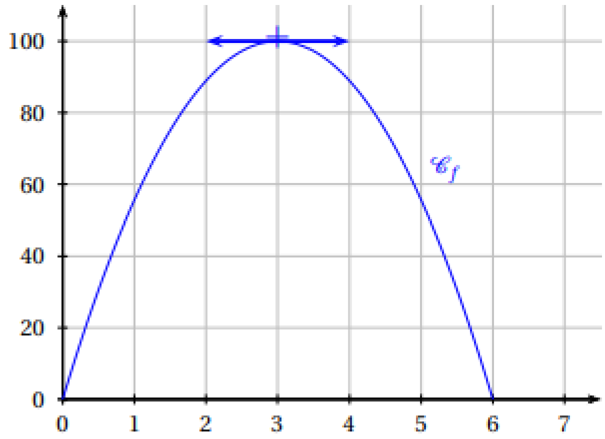
On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $g(x)=12{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;30]$, $g'(x)=(12{,}5-1{,}5625x)\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$.
2. Etudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* »?

Partie C

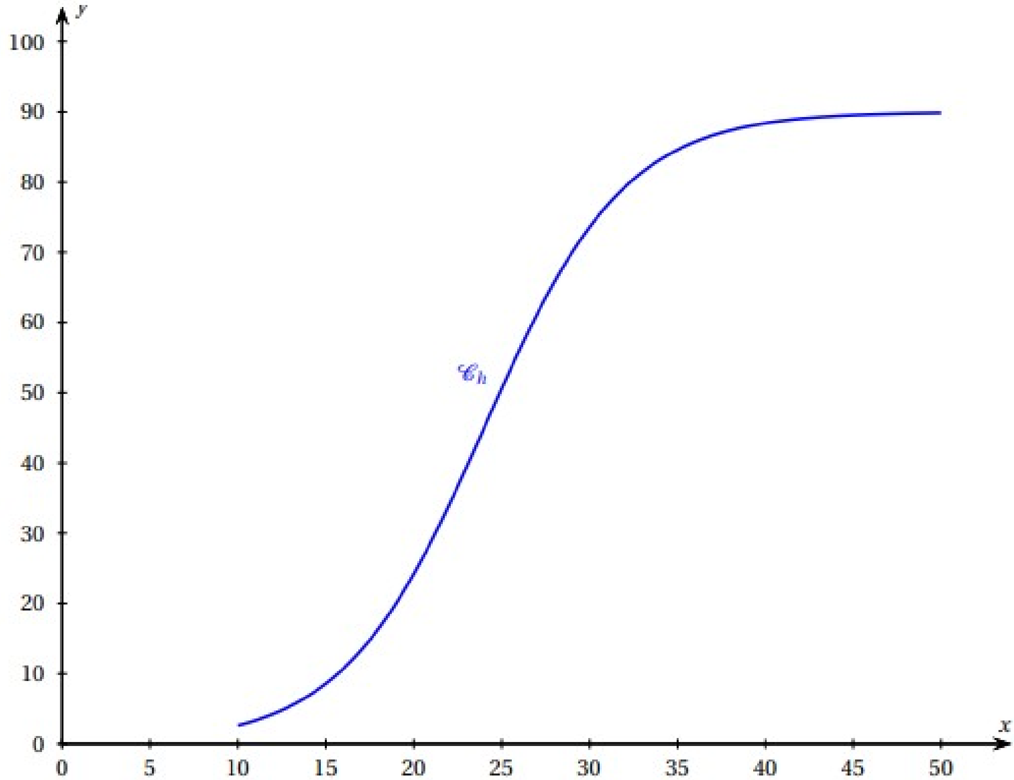
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10\,;50]$ par

$$h(x)=\frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

Nom :	***Devoir surveillé n°4***	***11 juin 2018***
Prénom :		*Usage de la calculatrice autorisé*

La courbe C_h de la fonction h est représentée ci-dessous:



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants:

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22{,}5\,e^{-0{,}25x+6}}{(1+e^{-0{,}25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))²` $\dfrac{5{,}625\,e^{-0{,}25x+6}(e^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10;50]$ l'inéquation $e^{-0{,}25x+6}-1>0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10;50]$.
4. A partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « *satisfaction* » atteint 80.
Arrondir au millier d'euros.

Nom :	***Devoir surveillé n°4***	***11 juin 2018***
Prénom :		*Usage de la calculatrice autorisé*

Exercice 4 – *Commun à tous les candidats* **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie

1. La somme $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{30}$ est égale à :

a) $-1+2^{31}$
b) $1-2^{31}$
c) $-1+2^{30}$
d) $1-2^{30}$

2. L'équation $\frac{x^3}{3}+x^2+3x=0$ admet sur R :

a) la solution -2
b) trois solutions distinctes
c) aucune solution
d) une unique solution

3. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n<0{,}003$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a) $n\geqslant 8$
b) $n\geqslant 9$
c) $n\leqslant 8$
d) $n\leqslant 9$

4. La fonction $(e^x+2)(4x+3)+e^x(2x^2+3x)$ est la dérivée de :

a) $(3e^x-5)(x-x^2)$
b) $\frac{e^x+2}{x^2-5}$
c) $(e^x+2)(2x^2+3x)$
d) $(4x+3)^2e^x$