Exercice 1

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

104 ; 3 196 ; 1 156 ; 863 ; 189 ;

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 3 196 et 1 156.

►3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 104 pour obtenir un carré parfait ?

►4. Rendre la fraction $\dfrac{3\,196}{1\,156}$ irréductible.

►5. Calculer $\dfrac{41}{3\,196} + \dfrac{21}{1\,156}$.

Exercice 2

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

1 216 ; 1 330 ; 947 ; 941 ; 950 ;

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 330 et 1 216.

►3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 950 pour obtenir un carré parfait ?

►4. Rendre la fraction $\dfrac{1\,330}{1\,216}$ irréductible.

►5. Calculer $\dfrac{18}{1\,330} + \dfrac{18}{1\,216}$.

Exercice 3

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

1 088 ; 444 ; 941 ; 2 108 ; 919 ;

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 2 108 et 1 088.

►3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 444 pour obtenir un carré parfait ?

►4. Rendre la fraction $\dfrac{2\,108}{1\,088}$ irréductible.

►5. Calculer $\dfrac{18}{2\,108} + \dfrac{8}{1\,088}$.

Exercice 4

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

600 ; 487 ; 1 600 ; 597 ; 875 ;

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 600 et 1 600.

►3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 875 pour obtenir un carré parfait ?

►4. Rendre la fraction $\dfrac{600}{1\,600}$ irréductible.

►5. Calculer $\dfrac{15}{600} + \dfrac{48}{1\,600}$.

Corrigé de l'exercice 1

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}104 &= 2\times 52\\ &= 2\times 2\times 26\\ &= 2\times 2\times 2\times 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3196 &= 2\times 1598\\ &= 2\times 2\times 799\\ &= 2\times 2\times 17\times 47\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1156 &= 2\times 578\\ &= 2\times 2\times 289\\ &= 2\times 2\times 17\times 17\end{aligned}$$

863 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}189 &= 3\times 63\\ &= 3\times 3\times 21\\ &= 3\times 3\times 3\times 7\end{aligned}$$

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 3 196 et 1 156.

D'après la question 1), on sait que les nombres 3 196 et 1 156 ont comme facteurs premiers communs : $2, 2, 17$.

On en déduit que le PGCD des nombres 3 196 et 1 156 est : $2\times 2\times 17 = 68$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 3 196 et de 1 156.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a\times b = PGCD(a;\ b)\times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(3\,196;\ 1\,156) = \dfrac{3\,196\times 1\,156}{68} = 54\,332$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(3\,196;\ 1\,156) = 68 = 2\times 2\times 17$, alors les "facteurs complémentaires" de $3\,196 = 2\times 2\times 17\times 47$ est : 47. On en déduit que $PPCM(3\,196;\ 1\,156) = 1\,156\times 47 = 54\,332$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 104 est :

$104 = 2\times 2\times 2\times 13$.

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 13.

Le nombre cherché est par conséquent 26 et le carré parfait obtenu est 2 704.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(3 196 ; 1 156) = 68, donc on obtient :

$\dfrac{3\,196_{\div 68}}{1\,156_{\div 68}} = \dfrac{47}{17}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 3 196 et 1 156, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.

$\dfrac{41_{\times 17}}{3\,196_{\times 17}} + \dfrac{21_{\times 47}}{1\,156_{\times 47}} = \dfrac{697}{54\,332} + \dfrac{987}{54\,332} = \dfrac{1\,684_{\div 4}}{54\,332_{\div 4}} = \dfrac{421}{13\,583}$.

Corrigé de l'exercice 2

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}1216 &= 2 \times 608\\ &= 2 \times 2 \times 304\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 152\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 76\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 38\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1330 &= 2 \times 665\\ &= 2 \times 5 \times 133\\ &= 2 \times 5 \times 7 \times 19\end{aligned}$$

947 est un nombre premier.
941 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}950 &= 2 \times 475\\ &= 2 \times 5 \times 95\\ &= 2 \times 5 \times 5 \times 19\end{aligned}$$

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 330 et 1 216.
D'après la question 1), on sait que les nombres 1 330 et 1 216 ont comme facteurs premiers communs : $2, 19$.
On en déduit que le PGCD des nombres 1 330 et 1 216 est : $2 \times 19 = 38$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 330 et de 1 216.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(1\,330;\ 1\,216) = \dfrac{1\,330 \times 1\,216}{38} = 42\,560$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(1\,330;\ 1\,216) = 38 = 2 \times 19$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,330 = 2 \times 5 \times 7 \times 19$ sont : 5 , 7. On en déduit que $PPCM(1\,330;\ 1\,216) = 1\,216 \times 5 \times 7 = 42\,560$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 950 est :
$950 = 2 \times 5 \times 5 \times 19$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 19.
Le nombre cherché est par conséquent 38 et le carré parfait obtenu est 36 100.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(1 330 ; 1 216) = 38, donc on obtient :
$\dfrac{1\,330_{\div 38}}{1\,216_{\div 38}} = \dfrac{35}{32}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 330 et 1 216, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{18_{\times 32}}{1\,330_{\times 32}} + \dfrac{18_{\times 35}}{1\,216_{\times 35}} = \dfrac{576}{42\,560} + \dfrac{630}{42\,560} = \dfrac{1\,206_{\div 2}}{42\,560_{\div 2}} = \dfrac{603}{21\,280}$.

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}1088 &= 2 \times 544\\ &= 2 \times 2 \times 272\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 136\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 68\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}444 &= 2 \times 222\\ &= 2 \times 2 \times 111\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 37\end{aligned}$$

941 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}2108 &= 2 \times 1054\\ &= 2 \times 2 \times 527\\ &= 2 \times 2 \times 17 \times 31\end{aligned}$$

919 est un nombre premier.

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 2 108 et 1 088.

D'après la question 1), on sait que les nombres 2 108 et 1 088 ont comme facteurs premiers communs : $2, 2, 17$.

On en déduit que le PGCD des nombres 2 108 et 1 088 est : $2 \times 2 \times 17 = 68$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 2 108 et de 1 088.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.

Donc : $PPCM(2\,108;\ 1\,088) = \dfrac{2\,108 \times 1\,088}{68} = 33\,728$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(2\,108;\ 1\,088) = 68 = 2 \times 2 \times 17$, alors les "facteurs complémentaires" de $2\,108 = 2 \times 2 \times 17 \times 31$ est : 31. On en déduit que $PPCM(2\,108;\ 1\,088) = 1\,088 \times 31 = 33\,728$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 444 est :

$444 = 2 \times 2 \times 3 \times 37$.

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 3 et 37.

Le nombre cherché est par conséquent 111 et le carré parfait obtenu est 49 284.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(2 108 ; 1 088) = 68, donc on obtient :

$\dfrac{2\,108_{\div 68}}{1\,088_{\div 68}} = \dfrac{31}{16}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 2 108 et 1 088, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.

$\dfrac{18_{\times 16}}{2\,108_{\times 16}} + \dfrac{8_{\times 31}}{1\,088_{\times 31}} = \dfrac{288}{33\,728} + \dfrac{248}{33\,728} = \dfrac{536_{\div 8}}{33\,728_{\div 8}} = \dfrac{67}{4\,216}$.

Corrigé de l'exercice 4

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}600 &= 2 \times 300\\ &= 2 \times 2 \times 150\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 75\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 25\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5\end{aligned}$$

487 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}1600 &= 2\times 800\\ &= 2\times 2\times 400\\ &= 2\times 2\times 2\times 200\\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times 100\\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 50\\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 25\\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5\times 5\end{aligned}$$

$$597 = 3\times 199$$

$$\begin{aligned}875 &= 5\times 175\\ &= 5\times 5\times 35\\ &= 5\times 5\times 5\times 7\end{aligned}$$

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 600 et 1 600.

D'après la question 1), on sait que les nombres 600 et 1 600 ont comme facteurs premiers communs : $2, 2, 2, 5, 5$.

On en déduit que le PGCD des nombres 600 et 1 600 est : $2\times 2\times 2\times 5\times 5 = 200$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 600 et de 1 600.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a\times b = PGCD(a;\ b)\times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(600;\ 1\,600) = \dfrac{600\times 1\,600}{200} = 4\,800$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(600;\ 1\,600) = 200 = 2\times 2\times 2\times 5\times 5$, alors les "facteurs complémentaires" de $600 = 2\times 2\times 2\times 3\times 5\times 5$ est : 3. On en déduit que $PPCM(600;\ 1\,600) = 1\,600\times 3 = 4\,800$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 875 est :

$875 = 5\times 5\times 5\times 7$.

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 5 et 7.

Le nombre cherché est par conséquent 35 et le carré parfait obtenu est 30 625.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(600 ; 1 600) = 200, donc on obtient :
$\dfrac{600{\div 200}}{1\,600{\div 200}} = \dfrac{3}{8}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 600 et 1 600, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{15{\times 8}}{600{\times 8}} + \dfrac{48{\times 3}}{1\,600{\times 3}} = \dfrac{120}{4\,800} + \dfrac{144}{4\,800} = \dfrac{264{\div 24}}{4\,800{\div 24}} = \dfrac{11}{200}$.