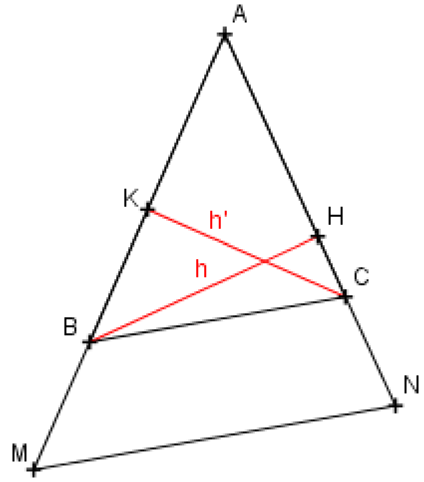
Démonstration :

Soient un triangle ABC, un point M de (AB) et un point N de (AC) tels que (MN)//(BC).



Démontrons que $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$

On note h la mesure de la hauteur commune aux triangles ABC, CBN et ABN issue de B.
On note h' la mesure de la hauteur commune aux triangles ABC, MBC et AMC issue de C.

On exprime l'aire du triangle ABC.

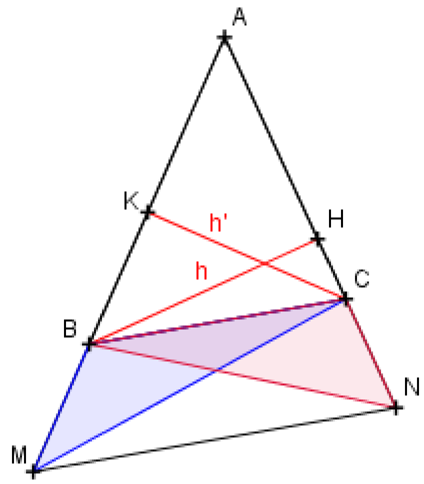
L'aire de ABC est : $A_{ABC}=\dfrac{AC\times h}{2}$.

L'aire de ABC est aussi : $A_{ABC}=\dfrac{AB\times h'}{2}$.

L'aire de ABC est la même quelque soit la formule considérée.

On en déduit $\dfrac{h'}{h}=\dfrac{AB}{AC}$.

Les triangles CBN et MBC ont une base commune [BC] et leurs hauteurs relatives à [BC] ont la même longueur (puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles). Leurs aires sont donc égales.



On exprime l'aire des triangles CBN et MBC.

L'aire de CBN est : $A_{CBN}=\dfrac{NC\times h}{2}$.

L'aire de MBC est : $A_{MBC}=\dfrac{MB\times h'}{2}$.

On en déduit $\dfrac{h}{h'}=\dfrac{MB}{NC}$.

En associant les deux égalités précédentes, on obtient : $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{MB}{NC}$.

Dans le cas où A, B et M sont alignés dans cet ordre, on obtient: $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB+BM}{AC+CN}=\dfrac{AM}{AN}$.

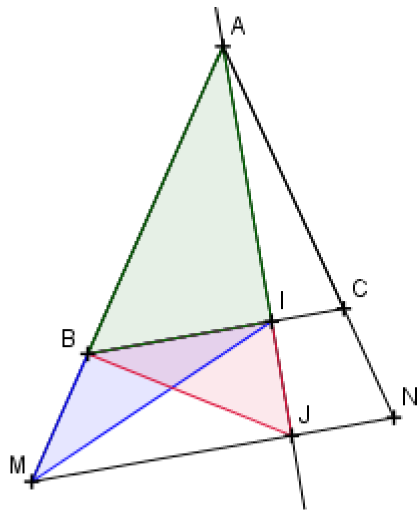
Dans le cas où M, A et B sont alignés dans cet ordre, on obtient : $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BM-AB}{CN-AC}=\dfrac{AM}{AN}$.

L'égalité $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AM}{AN}$ est équivalente à $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AM}{AB}$ (par l'égalité des produits en croix).

Démontrons que $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{MN}{BC}$

Considérons la perpendiculaire à (BC) passant par A. Elle coupe (BC) en I et (MN) en J.
Alors [AI] est la hauteur du triangle ABC issue de A et [AJ] la hauteur du triangle AMN issue de A.

Les triangles IJB et IBM ont une base commune [IB] et leurs hauteurs relatives à [IB] ont la même longueur (puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles). Leurs aires sont donc égales. Alors les triangles AJB et AIM ont également la même aire par juxtaposition de ABI.



On exprime l'aire des triangles AJB et AIM.

L'aire de AJB est : $A_{AJB}=\dfrac{AJ\times IB}{2}$.

L'aire de AIM est : $A_{AIM}=\dfrac{AI\times JM}{2}$.

On obtient alors l'égalité : $AJ\times IB=AI\times JM$, puis : $\dfrac{AJ}{AI}=\dfrac{JM}{IB}$.

De la même façon, en utilisant les triangles AJC et AIN, on obtient l'égalité : $\dfrac{AJ}{AI}=\dfrac{JN}{IC}$.

L'association des deux égalités précédentes donne : $\dfrac{AJ}{AI}=\dfrac{JM}{IB}=\dfrac{JN}{IC}$.

On en déduit : $\dfrac{AJ}{AI}=\dfrac{JM+JN}{IB+IC}=\dfrac{MN}{BC}$.

En appliquant le même protocole de démonstration pour les triangles AIB et AJM que pour les triangles ABC et AMN précédemment, on arrive à : $\dfrac{AJ}{AI}=\dfrac{AM}{AB}$.

Finalement, on a bien : $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{MN}{BC}$.