Nom :	***Devoir surveillé n°2***	***1ES - 2017***
Prénom :	Corrigé type	

Exercice 1 – Résolution d'équations *(3 points)*

Résoudre les équations suivantes dans R.

$2x^2-3=5x$

On résout :
$2x^2-3=5x$
$\Leftrightarrow\ 2x^2-5x-3=0$
On calcule $\Delta=25+24=49$
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{5+7}{4}=3$.
$S=\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$.

$\dfrac{1}{2}(x^2+29)=2-13x$

On résout :
$\dfrac{1}{2}(x^2+29)=2-13x$
$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}x^2+13x+\dfrac{25}{2}=0$
On calcule $\Delta=169-25=144$.
L'équation a deux solutions :
$x_1=-13-12=-25$ et $x_2=-13+12=-1$.
$S=\{-25;-1\}$.

Exercice 2 – Résolution d'inéquations *(4 points)*

Résoudre les inéquations suivantes dans R.

$5x^2-5x-12>2x^2+4x+18$

On résout :
$5x^2-5x-12>2x^2+4x+18$
$\Leftrightarrow\ 3x^2-9x-30>0$
On calcule $\Delta=81+360=441$
L'expression a deux racines :
$x_1=\dfrac{9-21}{6}=-2$ et $x_2=\dfrac{9+21}{6}=5$.
L'inéquation peut s'écrire :
$3(x-5)(x+2)>0$.

On établit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
Signe de $3x^2-9x-30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$

$x^2-x+25<3x^2+5x-5$

On résout :
$x^2-x+25<3x^2+5x-5$
$\Leftrightarrow\ -2x^2-6x+30<0$
On calcule $\Delta=36+240=276$
L'expression a deux racines :
$x_1=\dfrac{6-\sqrt{276}}{-4}$ et $x_2=\dfrac{6+\sqrt{276}}{-4}$.
L'inéquation peut s'écrire :
$-2(x-x_1)(x-x_2)<0$

On établit le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
Signe de $x-3$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
Signe de $-2x^2-4x+30$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$

Nom :	***Devoir surveillé n°2***	***1ES - 2017***
Prénom :	Corrigé type	

Exercice 3 – Variations ***(3 points)***

Donner le tableau de variations de chaque fonction sur son ensemble de définition.

$f(x)=-0{,}8x^2+40x+100$ *définie sur [-5;60]*

On factorise partiellement $f(x)=-0{,}8(x^2-50x)+100$
On reconnaît le début du développement d'une identité remarquable : $f(x)=-0{,}8(x-25)^2+0{,}8\times 25^2+100$
D'où $f(x)=-0{,}8(x-25)^2+600$.

On calcule $f(-5)=-120$ et $f(60)=-380$.

On en déduit le tableau de variations :

x	–5	25	60
$f(x)$	–120 ↗	600	↘ –380

$g(x)=2x^2+x-8$ *définie sur [-20;40]*

On factoriser partiellement $g(x)=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-8$.
On reconnaît le début du développement d'une identité remarquable : $g(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-8$
D'où $g(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-8{,}125$.

On calcule $g(-20)=772$ et $g(40)=3232$.

On en déduit le tableau de variations :

x	–20	$-\frac{1}{4}$	40
$g(x)$	772 ↘	-8,125	↗ 3232

Exercice 4 – Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme ***(6 points)***

Soit une fonction polynôme du second degré : $p(x)=-x^2+2x+15$.

1. Vérifier que la forme canonique de p est : $p(x)=-(x-1)^2+16$ *.*

2. Déterminer une expression factorisée de p(x).

3. Utiliser l'une des écritures de la fonction polynôme pour répondre aux questions posées.
- *a. Calculer p(1).*
- *b. Calculer p(0).*
- *c. Montrer que p(x) admet un maximum sur R, dont on précisera la valeur.*
- *d. Résoudre l'équation p(x)=0.*
- *e. Résoudre l'équation p(x)=15.*
- *f. Résoudre l'inéquation* $p(x)\geqslant 16$

1. On développe
$$-(x-1)^2+16=-(x^2-2x+1)+16$$
$$=-x^2+2x+15$$
$$=p(x)$$
Donc la forme canonique de *p* est bien
$p(x)=-(x-1)^2+16$

2. On factorise $p(x)=-(x-1)^2+16$
$$p(x)=4^2-(x-1)^2$$
$$=(4+x-1)(4-x+1)$$
$$=(x+3)(5-x)$$
Une forme factorisée de *p* est $p(x)=-(x+3)(x-5)$.

Nom :	***Devoir surveillé n°2***	***1ES - 2017***
Prénom :	Corrigé type	

3. a. On calcule $p(1)=-(1-1)^2+16=16$

b. On calcule $p(0)=-0^2+2\times 0+15=15$

c. La forme canonique de *p* est $-(x-1)^2+16$.
Puisque le coefficient a est négatif, *p* admet un maximum.
Il est atteint en $x=1$ et sa valeur est $p(1)=16$.

d. On résout $p(x)=0 \Leftrightarrow -(x+3)(x-5)=0$.
D'où $S=\{-3;5\}$.

e. On résout $p(x)=15 \Leftrightarrow -x^2+2x+15=15 \Leftrightarrow x(-x+2)=0$.
On en déduit $S=\{0;2\}$.

f. On résout $p(x)\geqslant 16 \Leftrightarrow -(x-1^2)+16\geqslant 16 \Leftrightarrow -(x-1)^2\geqslant 0$.
Puisqu'un carré est toujours positif ou nul, on a $S=\{1\}$.

Exercice 5 – Résolution de problème ***(4 points)***

Une entreprise fabrique un type de bibelots à l'aide d'un moule. Le coût de production d'une quantité q de bibelots est donné, en euros, par : $C(q)=0{,}002q^2+2q+4000$.
On suppose que toute la production, quelle que soit la quantité est vendue au prix de 11€ le bibelot.

1. Exprimer la recette R(q) en fonction de la quantité q.

2. a. Étudier les variations de la fonction bénéfice B définie sur [0;+∞[par $B(q)=-0{,}002q^2+9q-4000$ *.*
b. En déduire la quantité de bibelots à fabriquer (et vendre) afin que le bénéfice réalisé par l'entreprise soit maximal.
c. Quelles quantités de bibelots l'entreprise doit-elle produire pour que son bénéfice soit positif ou nul.

1. La recette est le montant encaissé grâce aux ventes.
Donc $R(q)=11q$.

2. a. On détermine la forme canonique de $B(q)$.
On recherche les nombres réels a et b tels que
$B(q)=-0{,}002(q-a)^2+b$
On développe :
$-0{,}002(q^2-2aq+a^2)+b=-0{,}002q^2+0{,}004aq-0{,}002a^2+$
.
L'identification des coefficients nous donne le système :
$\begin{cases} 0{,}004a=9 \\ b-0{,}002a^2=-4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2250 \\ b=6125 \end{cases}$.
Alors la forme canonique de la fonction bénéfice est
$B(q)=-0{,}002(q-2250)^2+6125$.

On calcule $B(0)=-4000$.
On en déduit le tableau de variations de B sur [0;+∞[.

q	0		2250		$+\infty$
$B(q)$	–4000	$\nearrow$	6125	$\searrow$	

b. La fonction bénéfice admet un maximum de 6125€ pour q=2250.
Il faut donc produire <u>2250 bibelots</u> pour un bénéfice maximum.

c. On détermine les racines de B.
On calcule $\Delta=81-4\times 8=49$.
La fonction admet deux racines : $x_1=\frac{-9-7}{-0{,}004}=4000$ et

$x_2=\frac{-9+7}{-0{,}004}=500$.

En associant les racines de B et son sens de variations, on conclut que le bénéfice est positif pour une production comprise <u>entre 500 et 4000 bibelots</u>.